Utilización de metodologías activas de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, centradas en el estudiante y desarrolladas en el espacio innovador de una hiperaula

Carolina Fernández-Salinero Miguel

Beatriz de la Riva Picatoste

Eugenio Roanes Lozano

Eugenio Roanes Macías

Utilización de metodologías activas de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, centradas en el estudiante y desarrolladas en el espacio innovador de una hiperaula

Carolina Fernández-Salinero Miguel
Beatriz de la Riva Picatoste
Eugenio Roanes Lozano
Eugenio Roanes Macías

ISBN 978-84-09-26360-8

Mardrid, Noviembre de 2020

ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN

La inauguración de la hiperaula de la Facultad de Educación (UCM) en abril de 2019 y su prioridad de uso para el Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas durante el curso 2019-2020, supone un marco experimental absolutamente novedoso para la enseñanza de la asignatura "Innovación docente e iniciación a la investigación educativa" (especialidad de matemáticas del mencionado Máster), empleando para ello metodologías activas de enseñanza centradas en el estudiante. Estas circunstancias invitan a un equipo de profesores y estudiantes del Máster en Formación del Profesorado a solicitar un Proyecto de Innovación Docente para el curso académico 2019/2020 titulado: *Utilización de metodologías activas de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, centradas en el estudiante y desarrolladas en el espacio innovador de una hiperaula.*

Este proyecto surge de la preocupación de varios docentes del Máster en Formación del Profesorado, que imparten sus clases en la Facultad de Educación, por desarrollar metodologías de enseñanza innovadoras centradas en el estudiante y enmarcadas en la denominada pedagogía activa, la cual aparece históricamente como respuesta a una pedagogía tradicional, centrada en el docente y con un objetivo marcadamente intelectual y moral. Se encuentra respaldada por figuras como Freinet, Montessori, Decroly o Dewey, entre otras, y se vincula a las ideas de la escuela nueva, reformista o progresista. Su objetivo es establecer una organización docente dirigida a eliminar la pasividad del alumnado y la mera memorización de contenidos, utilizando una didáctica de la respuesta que provoca un movimiento de reacción y descubrimiento por parte de los estudiantes. En esta pedagogía, el docente facilita el proceso de aprendizaje, observa y despierta el interés, empleando estrategias metodológicas activas y provocando que el estudiante aprenda a través de la propia decisión, experiencia y participación, siendo el verdadero protagonista de su formación. Facilita además un conocimiento anticipatorio, creatividad y respuesta activa, así como un aprendizaje vivencial, con tratamiento individual y colectivo y feedback inmediato. Asimismo, el aprendizaje activo mejora la comprensión y aumenta el desarrollo de las habilidades cognitivas superiores, como la resolución de problemas y el pensamiento crítico.

Por lo tanto, al hablar actualmente de la pedagogía activa nos estamos refiriendo a un cambio de paradigma en el diseño, implementación y evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje, el cual se apoya en el constructivismo como teoría y en distintas estrategias metodológicas para el desarrollo didáctico que permiten identificar procedimientos secuenciados que configuran la manera de actuar del docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Las estrategias metodológicas se especifican en metodologías o formas de organizar los recursos y presentar el contenido para alcanzar los objetivos y estas, a su vez, en técnicas, que son planteamientos que llevan a la práctica las metodologías y están definidas por normas de implementación. Pero seleccionar una buena estrategia metodológica no resulta fácil, pues requiere, inicialmente, precisar una clasificación, a continuación, elegir y emplear en cada momento del proceso de enseñanza-aprendizaje aquella que resulte más útil y, finalmente, adecuarla a las características de los destinatarios, a los objetivos y contenidos propuestos, al contexto de referencia, a los medios disponibles y a los tiempos establecidos (Fernández-Salinero, 2013; Bernal et al., 2019). Y es precisamente de lo que va a tratar este breve manual, en identificar las estrategias metodológicas, los métodos y las técnicas más útiles para conseguir un aprendizaje más significativo en los estudiantes del Máster en Formación del Profesorado de la especialidad de matemáticas.

METODOLOGÍAS ACTIVAS DE ENSEÑANZA APLICADAS A LA ENSEÑANZA DEL MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO. *Carolina Fernández-Salinero y Beatriz de la Riva*

Uno de los pasos básicos que es necesario plantear de manera prioritaria consiste en concretar las metodologías a emplear, las cuales nos informan sobre el camino a seguir. Son la respuesta psicopedagógica al perfil del sujeto en formación. Por ello, actuar metódicamente implicará hacerlo conforme a un orden o procedimiento. Los métodos dentro de la planificación educativa se constituyen, por tanto, en el conjunto de situaciones y actuaciones que los docentes prepararán y llevarán a cabo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje para conseguir que sus destinatarios alcancen las competencias requeridas. Los criterios de decisión básicos para determinar qué metodología de formación es la adecuada son (Colom et al., 1994; Sarramona, 2002; Puchol, 2012):

- La compatibilidad con objetivos y contenidos.
- La relación con las características de los destinatarios: participación (implicación de los participantes), practicidad (aplicación de los aprendizajes), motivación (interés por la formación) y funcionalidad (utilidad de los aprendizajes).
- La adaptación a los factores relacionados con los participantes (estilo de aprendizaje, edad, tamaño del grupo, motivación, etc.)
- La congruencia con los principios de rigor y realismo.
- La adecuación de los recursos disponibles, incluido el tiempo.
- El carácter eminentemente transferible de los aprendizajes.

Las técnicas nos concretan diferentes formulaciones en relación con un mismo método y las podemos definir como el recurso didáctico al que se acude para precisar un momento de la formación o una secuencia del método en la consecución del aprendizaje. Necesitamos reflexionar sobre qué técnicas son mejores para el logro de los objetivos y se ajustan más a los contenidos, a los recursos disponibles (humanos, materiales, espaciales, temporales y económicos) y a las características de los participantes, a sus intereses, así como a sus ritmos de aprendizaje. Resulta conveniente, a este respecto, apoyarse en diferentes métodos y técnicas (Viladot, 2002).

En realidad, la diversidad de situaciones formativas en las que podemos vernos involucrados nos permite hablar de gran variedad de metodologías didácticas, tantas que para aproximarse al tema es necesario partir de alguna clasificación. Las clasificaciones existentes son distintas, pudiendo destacar algunas de ellas (Bernal et al., 2019):

- En función del tipo de objetivo al que responden (cognitivo, psicomotor y afectivo).
- Respecto del nivel de los objetivos (inferiores o superiores).
- En relación con el grado de control y de delegación del contenido por parte de los docentes.
- En lo que respecta al grado de participación de docentes y estudiantes en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- En relación con el número de participantes (orientadas a individuos u orientadas a equipos).
- Según el carácter presencial o no presencial de la formación.
- En función de la forma de razonamiento (deductivas, inductivas o analógicas/comparativas); de la lógica de la materia (tradicionales o basadas en el

interés del participante); de la relación con la realidad (intuitivas/simbólicas y aplicadas); de las actividades externas del participante (pasivas y activas); de la sistematización de los contenidos (globalizadas y especializadas) y de la aceptación de lo enseñado (dogmáticas o heurísticas).

De las clasificaciones señaladas, la que consideramos más integradora es la que toma como referente el grado de participación de docentes y estudiantes en la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje, en la cual no se olvidan, por supuesto, los objetivos de formación que se pretende alcanzar, ni la manera de abordar los contenidos. De esta relación surgen tres estrategias metodológicas: expositiva (mayor protagonismo docente), demostrativa (protagonismo similar docente-discente) y activa (mayor protagonismo discente). Esta clasificación nos permite hablar de tres grandes planteamientos metodológicos, a cada uno de los cuales se asocian unos métodos específicos, con sus técnicas correspondientes, como queda reflejado en la tabla siguiente.

Tabla 1. Clasificación de estrategias metodológicas, métodos y técnicas (relacionadas con el constructivismo).

Teoría	Estrategia metodológica	Método	Técnica
Constructivista	Expositiva	Exposición oral	Lección magistral Mesa redonda
		Interrogativo	Preguntas exploratorias (al grupo, un estudiante concreto, entre estudiantes)
		Autoformación	Aprendizaje individual
	Demostrativa	Demostración	Mentoring TWI (Training Within Industry) Coaching …
	Activa (Active learning)	Simulación	Role playing Simulación informática
		Aprendizaje basado en proyectos Aprendizaje basado en retos Aprendizaje basado en problemas Aprendizaje basado en investigación / indagación (Inquiry Based Learning) Aprendizaje por descubrimiento guiado	Design thinking, Visual Thinking Phillips 66 SCAMPER … aplicado a: • Problemas matemáticos • Desarrollos informáticos

Fuente: Roanes-Lozano y Fernández-Salinero (2020).

Este planteamiento metodológico lo hemos utilizado en la asignatura "Innovación docente e iniciación a la investigación educativa" (especialidad de matemáticas del Máster en Formación del Profesorado), desarrollando una experiencia formativa en tres escenarios, donde los estudiantes tienen diferentes roles computacionales. Los escenarios elegidos intentan representar los posibles niveles de uso de utensilios tecnológicos para el aprendizaje de las matemáticas, de inexistentes a intensivos, y serían los siguientes:

• Escenario I: los estudiantes no usan tecnología.
• Escenario II: los estudiantes utilizan algunos recursos de propósito específico desarrollados previamente (simulaciones). Este enfoque tiene la "ventaja" de que los estudiantes no tendrían que aprender a utilizar los sistemas computacionales.
• Escenario III: los estudiantes utilizan CAS y DGS como "calculadoras simbólicas" o "calculadoras geométricas" (lo que requiere algunos conocimientos sobre la herramienta de cálculo) y a veces incluso desarrollan pequeñas aplicaciones.

En las tablas siguientes quedan representados gráficamente los planteamientos precedentes, así como los métodos y técnicas empleados específicamente en cada escenario.

Tabla 2. Clasificación de estrategias metodológicas, métodos y técnicas (relacionadas con el constructivismo), correspondientes al escenario I.

<table>
<tr><th>Escenario I
Teoría</th><th>Estrategia metodológica</th><th>Método</th><th>Técnica</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Constructivista</td><td rowspan="3">Expositiva</td><td>Exposición oral</td><td>Lección magistral
Mesa redonda</td></tr>
<tr><td>Interrogativo</td><td>Preguntas exploratorias
(al grupo, un estudiante concreto, entre estudiantes)</td></tr>
<tr><td>Autoformación</td><td>Aprendizaje individual</td></tr>
<tr><td>Demostrativa</td><td>Demostración</td><td>Mentoring
TWI (Training Within Industry)
Coaching …</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Activa
(Active learning)</td><td>Simulación</td><td>Role playing
Simulación informática</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje basado en proyectos
Aprendizaje basado en retos
Aprendizaje basado en problemas
Aprendizaje basado en investigación / indagación (Inquiry Based Learning)
Aprendizaje por descubrimiento guiado</td><td>Design thinking,
Visual Thinking
Phillips 66
SCAMPER …
aplicado a:
• Problemas matemáticos
• Desarrollos informáticos</td></tr>
</table>

Fuente: Roanes-Lozano y Fernández-Salinero (2020).

Tabla 3. Clasificación de estrategias metodológicas, métodos y técnicas (relacionadas con el constructivismo), correspondientes al escenario II.

Escenario II Teoría	Estrategia metodológica	Método	Técnica
Constructivista	**Expositiva**	**Exposición oral**	**Lección magistral** Mesa redonda
		Interrogativo	**Preguntas exploratorias** (al grupo, un estudiante concreto, entre estudiantes)
		Autoformación	Aprendizaje individual
	Demostrativa	Demostración	Mentoring TWI (Training Within Industry) Coaching …
	Activa (Active learning)	**Simulación**	Role playing **Simulación informática**
		Aprendizaje basado en proyectos Aprendizaje basado en retos Aprendizaje basado en problemas **Aprendizaje basado en investigación / indagación (Inquiry Based Learning)** Aprendizaje por descubrimiento guiado	Design thinking, Visual Thinking Phillips 66 SCAMPER … aplicado a: • **Problemas matemáticos** • Desarrollos informáticos

Fuente: Roanes-Lozano y Fernández-Salinero (2020).

Tabla 4. Clasificación de estrategias metodológicas, métodos y técnicas (relacionadas con el constructivismo), correspondientes al escenario III.

<table>
<tr><th>Escenario III
Teoría</th><th>Estrategia metodológica</th><th>Método</th><th>Técnica</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Constructivista</td><td rowspan="3">Expositiva</td><td>Exposición oral</td><td>Lección magistral
Mesa redonda</td></tr>
<tr><td>Interrogativo</td><td>Preguntas exploratorias
(al grupo, un estudiante concreto, entre estudiantes)</td></tr>
<tr><td>Autoformación</td><td>Aprendizaje individual</td></tr>
<tr><td>Demostrativa</td><td>Demostración</td><td>Mentoring
TWI (Training Within Industry)
Coaching …</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Activa
(Active learning)</td><td>Simulación</td><td>Role playing
Simulación informática</td></tr>
<tr><td>Aprendizaje basado en proyectos
Aprendizaje basado en retos
Aprendizaje basado en problemas
Aprendizaje basado en investigación / indagación (Inquiry Based Learning)
Aprendizaje por descubrimiento guiado</td><td>Design thinking,
Visual Thinking
Phillips 66
SCAMPER …
aplicado a:
• Problemas matemáticos
• Desarrollos informáticos</td></tr>
</table>

Fuente: Roanes-Lozano y Fernández-Salinero (2020).

A continuación vamos a presentar la experiencia formativa derivada de la utilización de los tres escenarios especificados, apoyándonos en una situación real de aprendizaje llevada a cabo en el Máster en Formación del Profesorado.

BREVE RESUMEN DE LAS POSIBILIDADES DE MAPLE. *Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías*

Este resumen de las posibilidades de Maple está basado en [1] y está actualizado usando [2]. Fue explicado en clases impartidas en la asignatura del MFPES en el curso 2019-2020.

Maple es un sistema de "cálculo simbólico" (área también denominada "álgebra computacional"), seguramente el más potente, junto con Mathematica. La UCM tiene "Licencia de Campus" de este sistema. Existen otros gratuitos no tan completos y cómodos (Maxima, Reduce,...).

Los sistemas de cálculo simbólico (CAS) son, posiblemente, la mejor herramienta para la enseñanza activa de la matemática. Su versatilidad y facilidad de uso los hace muy convenientes para una enseñanza activa, pues permiten que el estudiante pueda desarrollar y comprobar resultados de las distintas áreas de la matemática.

1. Introducción al lenguaje Maple

Los CAS trabajan en aritmética exacta, con lo que, en principio, no se realizan aproximaciones (% remite al resultado anterior):

```
> 1/2+1/5;
```

$$\frac{7}{10} \quad (1)$$

```
> sqrt(6)-sqrt(3)*sqrt(2);
```

$$\sqrt{6}-\sqrt{3}\,\sqrt{2} \quad (2)$$

```
> simplify(%);
```

$$0 \quad (3)$$

ni redondeos,

```
> 100!;
```

933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929638952175999932299\
    156089414639761565182862536979208272237582511852109168640000000000000000000000\
    0000000 **(4)**

salvo que lo pidamos con el comando evalf:

```
> evalf(%);
```

$$9.332621544\ 10^{157} \quad (5)$$

```
> evalf(Pi,1000);
```

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620\
    899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848\
    111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564\
    823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372\
    458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046\
    652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807\
    446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139\
    4946395224737190702179860943702770539217176293176752384674818467669\ **(6)**

40513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343\
01465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297747\
71309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024459455346908\
30264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717\
76691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712\
268066130019278766111959092164 20199

Además pueden manejarse variables no asignadas:

```
> x+x+x;
```

$$3\,x \tag{7}$$

```
> (x+y)^2-(x-y)^2;
```

$$(x+y)^2-(x-y)^2 \tag{8}$$

```
> simplify(%);
```

$$4\,x\,y \tag{9}$$

```
> (x^3+7*x^2+5*x-5)^2*(9*x^9+4*x^4+3*x-5);
```

$$\left(x^3+7\,x^2+5\,x-5\right)^2\left(9\,x^9+4\,x^4+3\,x-5\right) \tag{10}$$

```
> expand(%);
```

$$9\,x^{15}+126\,x^{14}+531\,x^{13}+540\,x^{12}-405\,x^{11}-446\,x^{10}+281\,x^9+236\,x^8+243\,x^7-143\,x^6 \\ -93\,x^5-15\,x^4-435\,x^3+75\,x^2+325\,x-125 \tag{11}$$

lo que permite que, internamente, se puedan implementar procesos complicados como, por ejemplo, la derivación o integración simbólicas:

```
> diff(sin(x^2),x);
```

$$2\,x\cos\left(x^2\right) \tag{12}$$

```
> int(x^3+x+2,x);
```

$$\frac{1}{4}\,x^4+\frac{1}{2}\,x^2+2\,x \tag{13}$$

Observemos que el uso, tanto de la derivación simbólica como de la integración simbólica, es muy sencillo. No obstante, la derivación simbólica es fácil de implementar, pero la integración simbólica no lo es en absoluto. Maple no se limita a obtener primitivas inmediatas, aplicando diversas técnicas de integración.

```
> diff(x*cos(a*x^3),x);
```

$$\cos\left(a\,x^3\right)-3\,x^3\,a\sin\left(a\,x^3\right) \tag{14}$$

```
> int( x*cos(x^2),x);
```

$$\frac{\sin\left(x^2\right)}{2} \tag{15}$$

Hay dos terminadores, ":" y" ;", sin y con eco, respetivamente:

```
> 3+2:
```

```
> 3+2;
```

(16)

$$5 \qquad (16)$$

En Maple expandir y simplificar priorizan la expansión y la cancelación:

```
> (x+y)^2-(x-y)^2;
```

$$(x+y)^2-(x-y)^2 \qquad (17)$$

```
> expand(%);
```

$$4\,x\,y \qquad (18)$$

```
> simplify(%%);
```

$$4\,x\,y \qquad (19)$$

```
> (x+y)^100-(x-y)^100;
```

$$(x+y)^{100}-(x-y)^{100} \qquad (20)$$

```
> simplify(%);
```

$$\begin{aligned}
&200\,(x^8+44\,x^6\,y^2+166\,x^4\,y^4+44\,x^2\,y^6+y^8)\,(x^4+10\,x^2\,y^2+5\,y^4)\,\Big(x^4+2\,x^2\,y^2 \qquad (21)\\
&\quad+\frac{1}{5}\,y^4\Big)\,(x^{40}+1180\,x^{38}\,y^2+176990\,x^{36}\,y^4+7678140\,x^{34}\,y^6+153946605\,x^{32}\,y^8\\
&\quad+1695050544\,x^{30}\,y^{10}+11173214440\,x^{28}\,y^{12}+46415911920\,x^{26}\,y^{14}\\
&\quad+125702737170\,x^{24}\,y^{16}+226757954440\,x^{22}\,y^{18}+275698284916\,x^{20}\,y^{20}\\
&\quad+226757954440\,x^{18}\,y^{22}+125702737170\,x^{16}\,y^{24}+46415911920\,x^{14}\,y^{26}\\
&\quad+11173214440\,x^{12}\,y^{28}+1695050544\,x^{10}\,y^{30}+153946605\,x^8\,y^{32}+7678140\,x^6\,y^{34}\\
&\quad+176990\,x^4\,y^{36}+1180\,x^2\,y^{38}+y^{40})\,x\,(x^{20}+290\,x^{18}\,y^2+9745\,x^{16}\,y^4+78200\,x^{14}\,y^6\\
&\quad+250850\,x^{12}\,y^8+369260\,x^{10}\,y^{10}+253450\,x^8\,y^{12}+76600\,x^6\,y^{14}+9725\,x^4\,y^{16}\\
&\quad+450\,x^2\,y^{18}+5\,y^{20})\,(x^2+y^2)\,\Big(x^{20}+90\,x^{18}\,y^2+1945\,x^{16}\,y^4+15320\,x^{14}\,y^6\\
&\quad+50690\,x^{12}\,y^8+73852\,x^{10}\,y^{10}+50170\,x^8\,y^{12}+15640\,x^6\,y^{14}+1949\,x^4\,y^{16}+58\,x^2\,y^{18}\\
&\quad+\frac{1}{5}\,y^{20}\Big)\,y
\end{aligned}$$

Podemos asignar valores a variables:

```
> a:=4;
```

$$a := 4 \qquad (22)$$

```
> a+a+5;
```

$$13 \qquad (23)$$

```
> b:=a+10;
```

$$b := 14 \qquad (24)$$

```
> a:=9;
```

$$a := 9 \qquad (25)$$

```
> b;
```
$$14 \qquad (26)$$

```
> y=x+5;
```
$$y=x+5 \qquad (27)$$

y quedarnos con el lado derecho de una expresión o realizar substituciones:

```
> rhs(%);
```
$$x+5 \qquad (28)$$

```
> subs(x=t,x^3-x+1);
```
$$t^3-t+1 \qquad (29)$$

Podemos borrar un asignación.

```
> a:='a';
```
$$a := a \qquad (30)$$

o resetear toda la sesión.

```
> restart;
```

Los errores se destacan adecuadamente:

```
> 3++4;
Error, unexpected number
```

Se pueden pedir ayudas precediendo al comando de un símbolo "?" o en "Ayuda".

```
> ?simplify
```

Se puede escribr algo con print:

```
> print(`Hola`);
```
$$\mathit{Hola} \qquad (31)$$

y se pueden escribir varias órdenes en la misma línea:

```
> m:=3:
> print( `El resultado es` , m , `euros`);
```
$$\mathit{El\ resultado\ es},\ 3,\ \mathit{euros} \qquad (32)$$

En cuanto a notación, en esta worksheet estamos introduciendo los input matemáticos en modo Ctrl-M (como en los antiguos Maple o en Maple Classic Worksheet). Se puede hacer que este sea el modo por defecto en: Herramientas / Opciones / Ver / Mostrar Entrada / Notación de Maple.
En este modo las teclas F3 y F4 permiten separar / juntar líneas de código.

```
> 3+4;
> 4+7;
```
$$7$$
$$11 \qquad (33)$$

Observemos que el formato por defecto para las entradas de código en los Maple modernos es el siguiente (no es necesario usar terminadores):

> $3+4$
$$7 \qquad (34)$$

> $x+x$
$$2x \qquad (35)$$

2. Estructuras de datos, sumatorias, productorias y límites

Las estructuras de datos más usuales están disponibles, así como sumatorias, productorias, etc.
Sucesiones:

```
> seq(a^i,i=1..10);
```

$$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10} \quad (36)$$

```
> seq(ithprime(j),j=1..100);
```

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541 **(37)**

```
> SC:=seq(i^3,i=1..10);
```

$$SC := 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 \quad (38)$$

```
> SC[4];
```

$$64 \quad (39)$$

Sumatorias y productorias:

```
> sum(n,n=1..100);
```

$$5050 \quad (40)$$

```
> Sum(n,n=1..10) = sum(n,n=1..10);
```

$$\sum_{n=1}^{10} n = 55 \quad (41)$$

```
> product(x^2,x=1..4);
```

$$576 \quad (42)$$

```
> Product(x^2,x=1..4)=product(x^2,x=1..4);
```

$$\prod_{x=1}^{4} x^2 = 576 \quad (43)$$

Maple incluso es capaz de sumar series:

```
> sum(1/n,n=1..infinity);
```

$$\infty \quad (44)$$

pues puede calcular límites (de modo formal):

```
> limit(x^2,x=0);
```

$$0 \quad (45)$$

```
> limit(x^2,x=3);
```

$$9 \quad (46)$$

```
> limit(x^3,x=-infinity);
```

$$-\infty \quad (47)$$

```
> limit(x/sin(x),x=0);
```

$$1 \tag{48}$$

Volviendo a estructuras de datos, se puede trabajar con conjuntos y están definidas las operaciones usuales entre ellos (realmente son conjuntos ordenados lo que considera):

```
> A:={a,e,i,o,u};
```

$$A := \{a, e, i, o, u\} \tag{49}$$

```
> B:={a,b,c};
```

$$B := \{a, b, c\} \tag{50}$$

```
> C:={z^2 $ z=1..3};
```

$$C := \{1, 4, 9\} \tag{51}$$

```
> A union B;
```

$$\{a, b, c, e, i, o, u\} \tag{52}$$

```
> A intersect B;
```

$$\{a\} \tag{53}$$

```
> A intersect {k,l};
```

$$\emptyset \tag{54}$$

```
> A[2];
```

$$e \tag{55}$$

```
> op(2,A);
```

$$e \tag{56}$$

```
> nops(A);
```

$$5 \tag{57}$$

```
> A minus B;
```

$$\{e, i, o, u\} \tag{58}$$

```
> L:={{a,b},{a,b,c}};
```

$$L := \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \tag{59}$$

También se pueden usar listas:

```
> restart;
> La:=[pepe,juan,ana];
```

$$La := [pepe, juan, ana] \tag{60}$$

```
> Ln:=[4,9,9];
```

$$Ln := [4, 9, 9] \tag{61}$$

```
> La[2];
```

$$juan \tag{62}$$

```
> op(2,La);
```

$$juan \tag{63}$$

```
> Ln[2];
```

$$9 \tag{64}$$

```
> J:=[x^i $ i=1..3];
```
$$J := [x, x^2, x^3] \quad (65)$$

```
> L123:=[Pastor_aleman,18,10,Pepa,68666223,[Si,No]];
```
$$L123 := [Pastor\_aleman, 18, 10, Pepa, 68666223, [\mathrm{Si}, No]] \quad (66)$$

```
> nops(L123);
```
$$6 \quad (67)$$

```
> L123[6][2];
```
$$No \quad (68)$$

que se pueden concatenar fácilmente:

```
> L1:=[a,b,c]:
> L2:=[d,e]:
> op(L1);
```
$$a, b, c \quad (69)$$

```
> op(L2);
```
$$d, e \quad (70)$$

```
> L3:= [op(L1),op(L2)];
```
$$L3 := [a, b, c, d, e] \quad (71)$$

3. Funciones

Podemos definir funciones de una variable:

```
> f:=x->x+3;
```
$$f := x \mapsto x + 3 \quad (72)$$

```
> f(8);
```
$$11 \quad (73)$$

```
> f(a);
```
$$a + 3 \quad (74)$$

```
> g:=x->x^2;
```
$$g := x \mapsto x^2 \quad (75)$$

```
> g(8);
```
$$64 \quad (76)$$

y su composición es intuitiva:

```
> g(f(4));
```
$$49 \quad (77)$$

```
> g(f(x));
```
$$(x + 3)^2 \quad (78)$$

```
> f(g(x));
```
$$x^2 + 3 \quad (79)$$

```
> (f@g)(x);
```

$$x^2+3 \quad (80)$$

```
> h:=x->(f@g)(x);
```

$$h := x \mapsto (f@g)(x) \quad (81)$$

```
> h(3);
```

$$12 \quad (82)$$

```
> m:=f@g;
```

$$m := f@g \quad (83)$$

```
> m(s);
```

$$s^2+3 \quad (84)$$

```
> (f@@2)(x);
```

$$x+6 \quad (85)$$

y funciones de dos variables:

```
> f:=(x,y)->x^y;
```

$$f := (x, y) \mapsto x^y \quad (86)$$

```
> f(w,4);
```

$$w^4 \quad (87)$$

Es un lenguaje débilmente tipado (se puede, pero no es imprescindible precisar el tipo de las variables):

```
> f:=(x::posint)->x^2;
```

$$f := x{::}\mathbb{Z}^+ \mapsto x^2 \quad (88)$$

```
> f(7);
```

$$49 \quad (89)$$

```
> f(9.3);
Error, invalid input: f expects its 1st argument, x, to be of 
type posint, but received 9.3
```

4. Funciones aplicadas a estructuras de datos

Una opción muy cómoda consiste en aplicar una función a una estructura de datos:

```
> T:=[12,34,23,20];
```

$$T := [12, 34, 23, 20] \quad (90)$$

```
> f:=x->x*1.02;
```

$$f := x \mapsto x \cdot 1.02 \quad (91)$$

```
> f(23);
```

$$23.46 \quad (92)$$

```
> map(f,T);
```

$$[12.24, 34.68, 23.46, 20.40] \quad (93)$$

o una función de dos variables a dos listas del mismo número de elementos:

```
> L1:=[2,3,4];
```

$$L1 := [2, 3, 4] \tag{94}$$

```
> L2:=[x,x,y];
```

$$L2 := [x, x, y] \tag{95}$$

```
> g:=(a,b)->a*b:
> zip(g,L1,L2);
```

$$[2\,x, 3\,x, 4\,y] \tag{96}$$

Y se pueden definir cómodamente nuevas operaciones para, por ejemplo, conjuntos:

```
> difsim:=(A,B)->(A union B) minus (A intersect B);
```

$$difsim := (A, B) \mapsto A \cup B \setminus A \cap B \tag{97}$$

```
> Y:={1,2,3,4};
```

$$Y := \{1, 2, 3, 4\} \tag{98}$$

```
> Z:={3,4,5};
```

$$Z := \{3, 4, 5\} \tag{99}$$

```
> difsim(Y,Z);
```

$$\{1, 2, 5\} \tag{100}$$

5. Programación

Se puede, por supuesto, programar (en un estilo similar a Pascal):

```
> ej:=proc()
>   print(`Hola`);
>  end:
> ej();
```

$$Hola \tag{101}$$

```
> cuad:=proc(x)
>   x^2;
>  end:
> cuad(8);
```

$$64 \tag{102}$$

```
> 2+%;
```

$$66 \tag{103}$$

```
> cuad2:=proc(x)
>   print(`Su cuadrado es:`):
>   x^2;
>  end:
> cuad2(7);
```

Su cuadrado es:

$$49 \tag{104}$$

```
> rc:=proc(x::positive)
>   sqrt(x);
```

```
>  end:
> rc(9);
```

$$3 \qquad (105)$$

```
> rc(-4);
Error, invalid input: rc expects its 1st argument, x, to be of type positive, but received -4
```

```
> hipotenusa:=proc(a,b)
>    rc( cuad(a) + cuad(b) );
>  end:
> hipoteusa(30,40);
```

$$hipoteusa(30, 40) \qquad (106)$$

RETURN se puede usar dentro de un procedimiento para forzar la devolución de algo y detener la ejecución del programa, pero no es frecuente su uso.

Dentro de un procedimiento se pueden usar variables (locales y globales):

```
> hipo2:=proc(a,b)
>  local w1, w2;
>  w1:=cuad(a);
>  w2:=cuad(b);
>    rc( w1 + w2 );
>  end:
> hipo2(12,5);
```

$$13 \qquad (107)$$

Condicionales:

```
> temp:=proc(t)
>    if t<20 then print(`conecta`)
>             else print(`desconecta`)
>     fi;
>  end:
>temp(28);
```

$$desconecta \qquad (108)$$

```
> temp(16);
```

$$conecta \qquad (109)$$

```
> temp2:=proc(t)
>    if t<20 then print(`conecta`)else print(`desconecta`) end if;
>  end proc:
> temp2(24);
```

$$desconecta \qquad (110)$$

```
> temp3:=proc(t)
>    if t>18 and t<25 then print(`buena temp`)
>                      else print(`desagradable`)
>     end if;
```

```
> end proc:
> temp3(24);
```

buena temp (111)

```
> temp3(-4);
```

desagradable (112)

Una desigualdad puede escribirse de distintas formas (el # es para que no se ejecute esa línea):

```
> #   not x=y      x <> y
```

Se puede anidar un condicional dentro de otro:

```
> temp4:=proc(t)
>   if t<18 then print(`frio`)
>           else if t>24 then print(`calor`)
>                        else print(`bueno`)
>                end if;
>    end if;
>  end proc:
> temp4(8);
```

frio (113)

existiendo una forma abreviada para "else if":

```
> temp5:=proc(t)
>   if t<18 then print(`frio`)
>           elif t>24 then print(`calor`)
>                     else print(`bueno`)
>    end if;
>  end proc:
> temp5(8);
```

frio (114)

Hay diversas sentencias iterativas:

```
> for i from 0 to 5 by 2 do print(i^2) od;
```

0

4

16 (115)

```
> for i from 1 to 5 do print(i^2) od;
```

1

4

9

16

25 (116)

```
> for i to 5 do print(i^2) od;
```

1

$$4$$
$$9$$
$$16$$
$$25 \tag{117}$$

```
> for i from 1 to 5 do print(evalf(sin(i^2))) od;
```

$$0.8414709848$$
$$-0.7568024953$$
$$0.4121184852$$
$$-0.2879033167$$
$$-0.1323517501 \tag{118}$$

```
> L:=[34,5,7,78,9];
```

$$L := [34, 5, 7, 78, 9] \tag{119}$$

```
> for i in L do print(2*i) end do;
```

$$68$$
$$10$$
$$14$$
$$156$$
$$18 \tag{120}$$

```
> W:=[]:
> for i in L do W:=[op(W),2*i] end do:
> W;
```

$$[68, 10, 14, 156, 18] \tag{121}$$

```
> for j while j<5 do print(ithprime(j)) od;
```

$$2$$
$$3$$
$$5$$
$$7 \tag{122}$$

```
> for j while j^2<=150 do print(j) od;
```

$$1$$
$$2$$
$$3$$
$$4$$
$$5$$
$$6$$
$$7$$
$$8$$
$$9$$

10

11

12 **(123)**

Es posible definir procedimientos recursivos: Por ejemplo, factorial está definida, pero podemos crear un procedimiento que la calcule:

```
> 100!;
```

933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929638952175999932299\ **(124)**

9156089414639761565182862536979208272237582511852109168640000000000000000000\

0000000

```
> fact:=proc(n::nonnegint)
>  if n=0 then 1
>         else n * fact(n-1)
>   end if;
>  end proc:
> fact(0);
```

1 **(125)**

```
> fact(45);
```

119622220865480194561963161495657715064383733760000000000 **(126)**

```
> fact(-5);
Error, invalid input: fact expects its 1st argument, n, to be of
type nonnegint, but received -5
```

El término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci puede calcularse así:

```
> fibo:=proc(n::posint)
>  if n=1 or n=2 then 1
>         else fibo(n-1) + fibo(n-2)
>   end if;
>  end proc:
> fibo(12);
```

144 **(127)**

pero es muy lento cuando crece la entrada (el número de hojas del árbol que se crea crece de modo exponencial). Se puede podar haciendo que recuerde lo ya calculado:

```
> fibo:=proc(n::posint)
>  option remember;
>  if n=1 or n=2 then 1
>         else fibo(n-1) + fibo(n-2)
>   end if;
>  end proc:
> fibo(1234);
```

347746739180370201052517440604335969788684934927843710657352239304121649686845\ **(128)**

596797563645939245305337749302687502074476014584240179237874932111371991 96\

$185880957244855839195410199618845239083591334573573345387917784809104307561074077615552181139983742875 48487$

6. Polinomios

Los polinomios son clave para los CAS:

```
> p:=x^4+3*x+2;
```

$$p := x^4 + 3\,x + 2 \tag{129}$$

```
> q:=x^3-7*x;
```

$$q := x^3 - 7\,x \tag{130}$$

```
> p+q;
```

$$x^4 + x^3 - 4\,x + 2 \tag{131}$$

```
> p*q;
```

$$\left(x^4 + 3\,x + 2\right)\,\left(x^3 - 7\,x\right) \tag{132}$$

```
> degree(p,x);
```

$$4 \tag{133}$$

```
> lcoeff(p);
```

$$1 \tag{134}$$

```
> tcoeff(p);
```

$$2 \tag{135}$$

```
> solve(x+3=0 , x);
```

$$-3 \tag{136}$$

```
> solve(x+a=0 , x);
```

$$-a \tag{137}$$

```
> solve({x+y=5,x-y=1},{x,y});
```

$$\{x=3, y=2\} \tag{138}$$

```
> solve(x^3-1 , x);
```

$$1, -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2} \tag{139}$$

```
> isolve(x^2-5*x+6=0 );
```

$$\{x=2\}, \{x=3\} \tag{140}$$

(el comando anterior calcula las soluciones enteras).

7. Matrices

El cálculo matricial está incluido (sólo mostramos aquí algunas de sus posibilidades):

```
> with(LinearAlgebra):
> M:=Matrix([[2,3,4],[4,5,6],[7,7,6]]);
```

(141)

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \textbf{(141)}$$

```
> N:=Matrix([[2,2,3],[4,5,5],[1,0,1]]);
```

$$N := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(142)}$$

```
> evalm(M+M);
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 14 & 12 \end{bmatrix} \quad \textbf{(143)}$$

```
> evalm(3*M);
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 21 & 18 \end{bmatrix} \quad \textbf{(144)}$$

```
> evalm(M &* N);
```

$$\begin{bmatrix} 20 & 19 & 25 \\ 34 & 33 & 43 \\ 48 & 49 & 62 \end{bmatrix} \quad \textbf{(145)}$$

```
> Determinant(M);
```

$$2 \quad \textbf{(146)}$$

```
> Rank(M);
```

$$3 \quad \textbf{(147)}$$

```
> W:=Matrix([[a_11,a_12,a_13],[a_21,a_22,a_23],[a_31,a_32,a_33]]);
```

$$W := \begin{bmatrix} a\_11 & a\_12 & a\_13 \\ a\_21 & a\_22 & a\_23 \\ a\_31 & a\_32 & a\_33 \end{bmatrix} \quad \textbf{(148)}$$

```
> Determinant(W);
```

$$a\_11\, a\_22\, a\_33 - a\_11\, a\_23\, a\_32 - a\_12\, a\_21\, a\_33 + a\_12\, a\_23\, a\_31 + a\_13\, a\_21\, a\_32 - a\_13\, a\_22\, a\_31 \quad \textbf{(149)}$$

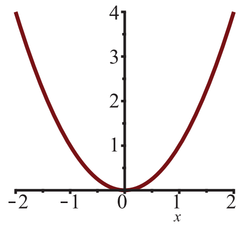
Nota 1: el símbolo "*" no se usa, se usa en su lugar "&*", pues el producto de matrices no es conmutativo y no debe hacer cancelaciones por esta razón.

Nota 2: para que la evaluación de una matriz definida a partir de otra matriz se realice como se espera (manteniéndolas independientes), definir la nueva usando "copy" en lugar de ":=".

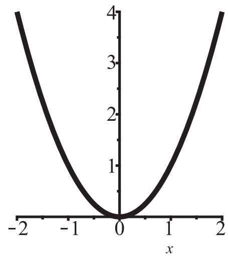
8. Representaciones gráficas

Hay muchos modos y muy potentes para realizar representaciones gráficas:

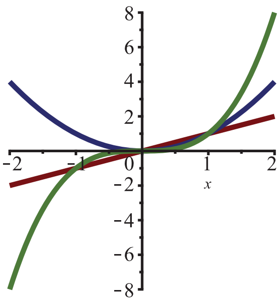
```
> with(plots):
> plot( x^2 , x=-2..2);
```



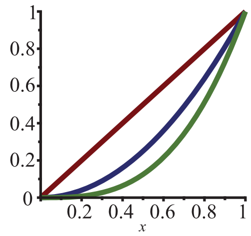

```
> plot( x^2 , x=-2..2 , scaling=constrained , color=black ,
  thickness=2);
```



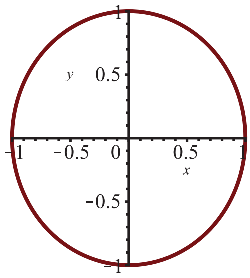

```
> plot( {x,x^2,x^3} , x=-2..2 , thickness=2);
```




```
> plot( {x,x^2,x^3} , x=0..1 , thickness=2);
```

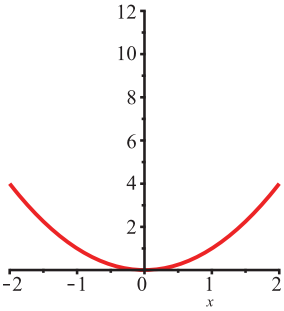



```
> implicitplot( x^2+y^2-1 , x=-1..1 , y=-1..1 );
```

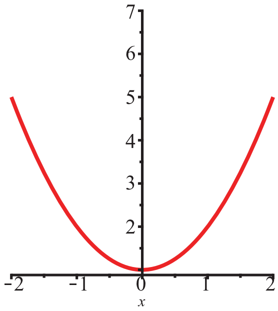


También se pueden realizar animaciones:

```
> animate( a*x^2 , x=-2..2 ,a=1..3 );
```

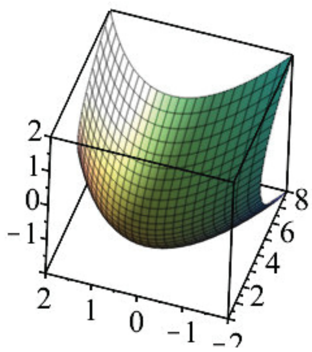


```
> animate( x^2+a , x=-2..2 ,a=1..3 );
```

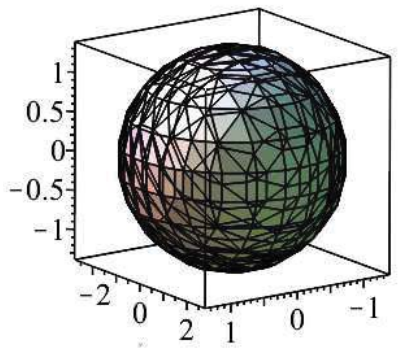


Y representaciones 3D (y animaciones 3D):

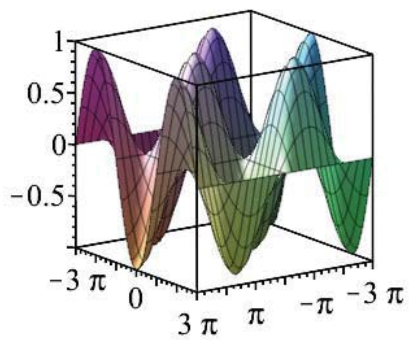
```
> plot3d( x^2+y^2 , x=-2..2 , y=-2..2 );
```



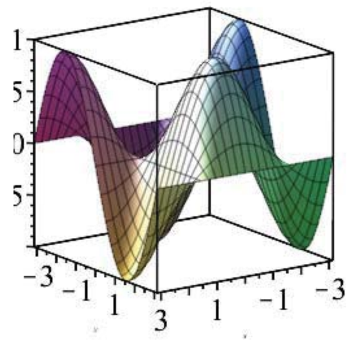
```
> implicitplot3d( x^2+(y/2)^2+z^2-2 , x=-2..2 , y=-3..3, z=-2..2 ,
  numpoints=1000);
```




```
> plot3d( sin(x/2)*cos(y/2) , x=-3*Pi..3*Pi, y=-3*Pi..3*Pi);
```




```
> animate3d(cos(t*x)*sin(t*y), x = -Pi .. Pi, y = -Pi .. Pi, t = 1
  .. 2);
```



Agradecimientos:

Agradecemos al profesor Gustavo Adolfo Muñoz Fernández y a la Dra. Valentina Giorgis las sugerencias y comentarios hechos a las primeras versiones de esta worksheet.

Referencias:

[1] Roanes-Macías, E., Roanes-Lozano, E. Cálculos Matemáticos por Ordenador con Maple V.5. Editorial Rubiños-1890, Madrid, 1999.

[2] Bernardin, L., Chin, P., DeMarco, P., Geddes, K. O., Hare, D. E. G., Heal, K. M. Labahn, G., May, J. P., McCarron, J., Monagan, M. B., Ohashi, D. and Vorkoetter, S. M. Maple Programming Guide. Maplesoft, Waterloo Maple Inc., Waterloo, Canada (2020). https://www.maplesoft.com/documentation_center/maple2020/ProgrammingGuide.pdf

FIN

EJEMPLO DE PROPUESTA DE EXPERIMENTO: SUMAS DE RIEMANN. *Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías*

La implementación propuesta más abajo está basada en [1] y actualizada de acuerdo con [2].
El contenido matemático vendría recogido en [3], p. 421 (Matemáticas II, Bachillerato Esp. Ciencias / Contenidos - Bloque 3: Análisis): "La integral definida. Teoremas del valor medio y fundamental del cálculo integral. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas."

Se propone una misma cuestión en 3 escenarios a los mismos estudiantes, con distintos niveles de implicación de la tecnología (ascendentes).

Escenario I: Sin tecnología
Material: papel milimetrado (o cuadriculado en su defecto), regla graduada y calculadora.
Explicación.
Práctica: Representar sobre el papel milimetrado (apaisado) la función seno(x) (con ayuda de la calculadora para calcular el
valor de la función en los extremos de los intervalos).
Calcular (aproximadamente) las sumas de Riemann superiores e inferiores en la gráfica anterior de la función seno(x).
Cálculo del área bajo la curva por la regla de Barrow (integrar la función sin usar medios tecnológicos).
Comparar los resultados obtenidos.
Hacer lo mismo con otras funciones sencillas.

Escenario II: Simulación
Material: Maple y su paquete Student.
Explicación (ya dada antes).
Práctica: Buscar y leer la ayuda del comando "RiemannSum" (del paquete "Student,Calculus1").
Calcular y representar las sumas de Riemann superiores e inferiores con el comando "RiemannSum" para la función
seno(x) (en inglés: sin(x)).
Refinar los intervalos. Ver la evolución de la aproximación al área bajo la curva.
Cálculo de la integral bajo la curva por la regla de Barrow (utilizando el comando "int" para calcular la primitiva, de
modo interactivo).
Comparar los resultados obtenidos.
Hacer lo mismo con otras funciones sencillas.

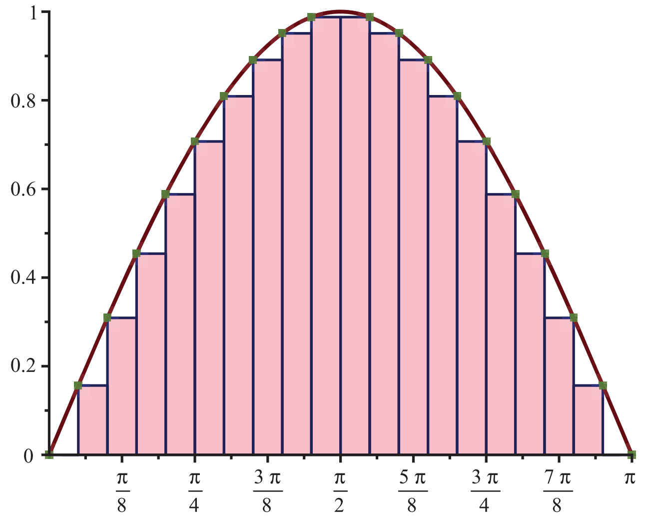
(Detalle, a título informativo, debajo).

Sumas de Riemann superiores e inferiores:

```
> restart;
> with(Student[Calculus1]):
> RiemannSum(sin(x), x=0.0..Pi, method = lower, partition=20);
```

1.838806340 (1)

```
> RiemannSum(sin(x), x=0..Pi, method = lower, output = plot,
  boxoptions=[filled=[color=pink,transparency=.5]], partition=20);
```

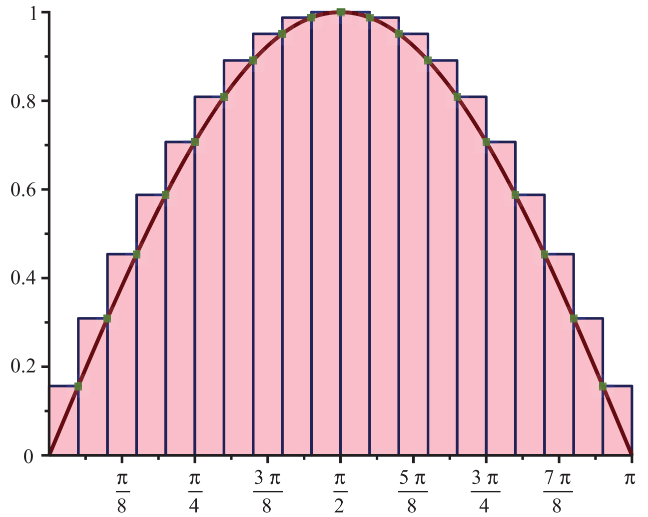


A lower Riemann sum approximation of $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, where $f(x) = \sin(x)$ and tl

```
> RiemannSum(sin(x), x=0.0..Pi, method = upper, partition=20);
```

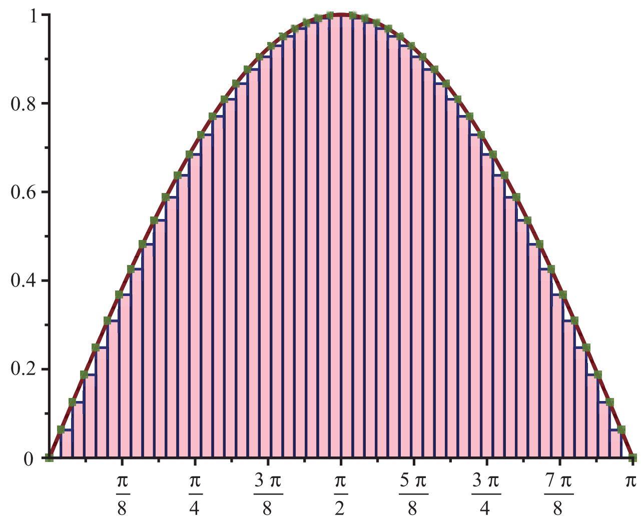
2.152965607 **(2)**

```
> RiemannSum(sin(x), x=0..Pi, method = upper, output = plot,
  boxoptions=[filled=[color=pink,transparency=.5]], partition=20);
```



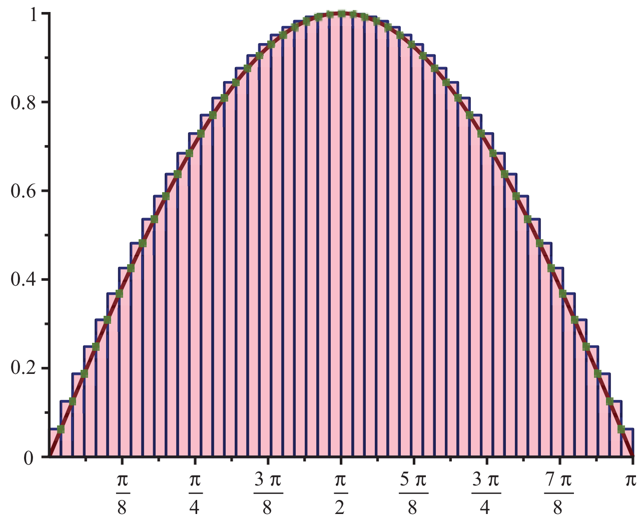
An upper Riemann sum approximation of $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, where $f(x) = \sin(x)$ and

```
> RiemannSum(sin(x), x=0..Pi, method = lower, output = plot,
  boxoptions=[filled=[color=pink,transparency=.5]], partition=50);
```



A lower Riemann sum approximation of $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, where $f(x) = \sin(x)$ and th

```
> RiemannSum(sin(x), x=0..Pi, method = upper, output = plot,
  boxoptions=[filled=[color=pink,transparency=.5]], partition=50);
```



An upper Riemann sum approximation of $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, where $f(x) = \sin(x)$ and

Integral indefinida (primitiva):

```
> int(sin(x),x);
```

$$-\cos(x) \tag{3}$$

Integral definida (área bajo la curva -por regla de Barrow-), se puede obtener, por ejemplo, con:

```
> eval(subs(x=Pi,%)-subs(x=0,%));
```

$$2 \tag{4}$$

Hacer lo mismo para la función f(x)=x^2.

Escenario III: Estudiante desarrollador

Material: Maple
Explicación (ya dada antes).
Práctica: Desarrollar un programa en Maple que calcule las sumas de Riemann superiores e inferiores para una función f(x) entre
dos valores, a y b, con n intervalos de la misma longitud (no se pide representar los rectángulos). Sugerencia: usar los comandos
"maximize" y "minimize".
Desarrollar un programa en Maple que, usando el comando "int", calcule el área bajo la curva entre dos valores, a y b, de
una función en la variable x (aplicando la Regla de Barrow).
Aplicarlos a la función sin(x) entre 0 y Pi.
Refinar los intervalos y ver como las sumas superiores e inferiores se aproximan al valor de la integral definida.
Hacer lo mismo con otras funciones sencillas.

(Soluciones a los programas debajo, a título informativo)

Sumas de Riemann:

```
> restart;
> RiemannSumaS:=proc(fun,a,b,n)
>   sum( (b-a)/n * maximize( fun, x=evalf(a+k*(b-a)/n)..evalf(a+(k+1)*(b-a)/n) ), k=0..n-1 );
>  end proc:
> RiemannSumaI:=proc(fun,a,b,n)
>   sum( (b-a)/n * minimize( fun, x=evalf(a+k*(b-a)/n)..evalf(a+(k+1)*(b-a)/n) ), k=0..n-1 );
>  end proc:
> RiemannSumaI(sin(x),0,Pi,20);
```

$$1.838806341 \tag{5}$$

```
> RiemannSumaS(sin(x),0,Pi,20);
```

$$2.152965607 \tag{6}$$

(sale, obviamente, el mismo valor obtenido en la simulación del escenario anterior -salvo redondeo-).

Para la función f(x)=x^2:

```
> RiemannSumaI(x^2,0,1,100);
```

$$0.3283500000 \tag{7}$$

```
> RiemannSumaS(x^2,0,1,100);
```

$$0.3383500000 \tag{8}$$

Usando la Regla de Barrow:

```
> area_bajo:=proc(fun,a,b)
>   local p;
>    p:=int(fun,x);
>    eval(subs(x=b,p) - subs(x=a,p))
>  end proc:
```

```
> area_bajo(sin(x),0,Pi);
```

$$2 \tag{9}$$

```
> area_bajo(x^2,0,1);
```

$$\frac{1}{3} \tag{10}$$

Valoración final

En cuanto a la motivación, habría que preguntar a los alumnos por sus preferencias en lo referente a los escenarios propuestos.

Otra posibilidad sería realizar la experiencia "en paralelo", con tres grupos independientes trabajando cada grupo en uno de los escenarios, en lugar de "en serie" (con los mismos estudiantes realizando las tareas en los tres escenarios), y hacer después una evaluación de los estudiantes de los tres grupos y comparar los resultados.

Agradecimientos:

Agradecemos al profesor Gustavo Adolfo Muñoz Fernández y a la Dra. Valentina Giorgis las sugerencias y comentarios hechos a las primeras versiones de esta worksheet.

Referencias:

[1] Roanes-Macías, E., Roanes-Lozano, E. Cálculos Matemáticos por Ordenador con Maple V.5. Editorial Rubiños-1890, Madrid, 1999.

[2] Bernardin, L., Chin, P., DeMarco, P., Geddes, K. O., Hare, D. E. G., Heal, K. M. Labahn, G., May, J. P., McCarron, J., Monagan, M. B., Ohashi, D. and Vorkoetter, S. M. Maple Programming Guide. Maplesoft, Waterloo Maple Inc., Waterloo, Canada (2020). https://www.maplesoft.com/documentation_center/maple2020/ProgrammingGuide.pdf

[3] Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE 3 de enero de 2015, pp. 169-546. https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

FIN

CONCLUSIONES

El presente manual se conforma como una referencia documental para todos aquellos docentes que pretendan realizar cambios metodológicos en sus clases, intentando responder a los siguientes objetivos:

- Centrar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el estudiante y no en el docente, es decir, priorizar el aprendizaje frente a la enseñanza, que se constituye en uno de los objetivos prioritarios establecidos por el Espacio Europeo de Educación Superior
- Visibilizar la utilidad de las metodologías activas, tanto para el profesorado de matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato, como para el profesorado universitario en general.
- Sensibilizar al profesorado y al alumnado sobre la importancia de utilizar metodologías activas de enseñanza.
- Identificar la utilidad de las metodologías activas centradas en el estudiante para la enseñanza de las matemáticas.
- Diseñar escenarios de aprendizaje diversos para la enseñanza de las matemáticas.

Parte del constructivismo como teoría pedagógica que postula la necesidad de entregar al estudiante las herramientas necesarias (generar andamiajes) que le permitan construir sus propios procedimientos para resolver una situación problemática, lo que implica que sus ideas puedan verse modificadas y siga aprendiendo. El constructivismo considera holísticamente al ser humano.

Este planteamiento teórico se lleva a la práctica por medio de la identificación de diferentes estrategias metodológicas, que incluyen técnicas didácticas derivadas de metodologías activas que nos permiten comprobar cómo aumenta el aprendizaje de las matemáticas al utilizar combinadamente diferentes métodos y técnicas más innovadores, facilitando la tarea de enseñar y mejorando la tarea de aprender. Y se apoya, para ello, en herramientas computacionales concretas como son: sistemas de cómputo algebraico (Computer Algebra Systems), CAS: Maple o Maxima, y sistemas de geometría dinámica (Dynamic Geometry Systems), DGS: GeoGebra (sobre las que uno de los autores del manual ha desarrollado software y ha publicado diversos artículos y libros). La combinación de métodos y herramientas en escenarios diversos dan como resultado diferentes maneras de abordar la enseñanza de las matemáticas, específicamente, en Educación Secundaria y Bachillerato, buscando conseguir mayores y mejores resultados de aprendizaje.

Con todo ello, el presente manual se concibe como un apoyo para la enseñanza, un recurso para la docencia, un documento de referencia para la investigación y una propuesta didáctica dinámica y útil en el contexto de la educación superior, prioritariamente, y de cualquier otro nivel educativo por extensión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernal Guerrero, Antonio, Fernández-Salinero Miguel, Carolina y Pineda Herrero, Pilar. (2019). *Formación continua.* Madrid: Síntesis.

Bernardin, L., Chin, P., DeMarco, P., Geddes, K. O., Hare, D. E. G., Heal, K. M. Labahn, G., May, J. P., McCarron, J., Monagan, M. B., Ohashi, D. and Vorkoetter, S. M. (2020). *Maple Programming Guide*. Waterloo, Canada: Maplesoft, Waterloo Maple Inc. Disponible en: https://www.maplesoft.com/documentation_center/maple2020/ProgrammingGuide.pdf

Banchi, H. y Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. Science and Children 46/2, 26-29.

Colom, A., Sarramona, J., y Vázquez, G. (1994). *Estrategias de formación en la empresa.* Madrid: Narcea.

Fernández-Salinero Miguel, Carolina (2013). Aproximación metodológica a la formación profesional. *Prosppetiva EP Pedagogia del Lavoro,* Settembre-Dicembre, 3, pp. 83-95.

National Institute for Health (2005): Doing Science: The Process of Science Inquiry. Disponible en: https://science.education.nih.gov/supplements/Process%20of%20Scietific%20Inquiry.pdf

Puchol, L. (2012). *Dirección y gestión de recursos humanos*. Madrid: Díaz de Santos.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE 3 de enero de 2015, pp. 169-546. Disponible en: https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Roanes-Lozano, E., & Fernández-Salinero, C. (2020). Evaluating CAS and DFS at the maths classroom: a proposal for an unbiassed experimental study about the impact of the computational role of the students in their learning. In, B. Barzel, R. Bebernik, L. Göbel, M. Pohl, H. Ruchniewicz, F. Schacht, & D. Thurm (ed.), *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14* (pp.328-337). Essen: DuEPublico, Duisburg-Essen Publications Online.

Roanes-Macías, E., y Roanes-Lozano, E. (1999). *Cálculos Matemáticos por Ordenador con Maple V.5.* Madrid: Editorial Rubiños-1890.

Sarramona, J. (2002). *La formación continua laboral.* Madrid: Biblioteca Nueva.

Viladot, G. (2002). Métodos y técnicas de formación en las organizaciones, en P. Pineda, (coord.), *Gestión de la formación en las organizaciones* (pp.149-169). Barcelona: Ariel.